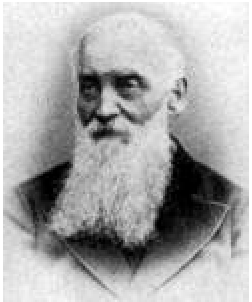
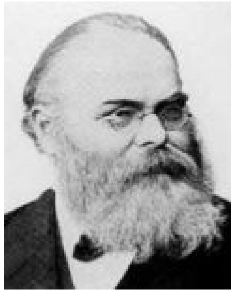
INEGALITATEA CAUCHY-BUNIAKOVSKI-SCHWARZ

SALMAN, LEILA - ELEVA - CLASA A X-A
MIHAI, Marcela - Coordonator Prof. Drd,. COLEGIUL TEHNIC „GHE. ASACHI”

În algebra liniară inegalitatea se poate aplica vectorilor, în analiză se poate aplica seriilor infinite sau integrării produselor, iar în teoria probabilităților se poate aplica variantelor şi covariantelor.

Inegalitatea pentru sume a fost publicată de Augustin Louis Cauchy în 1821, iar inegalitatea corespunzătoare pentru integrale a fost formulată inițial de Viktor Iakovlevici Buniakovski în 1859 şi a fost redescoperita de Hermann Schwarz în anul 1888.
Inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz este una dintre inegalitățile remarcabile,
ea fiind utilizată deseori în demonstrarea altor inegalități.

Pentru toți vectorii *x* şi *y* ai unui spațiu cu produs scalar real sau complex, inegalitatea are forma:

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle,$$

unde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ este produsul scalar. Echivalent, extragând rădăcina pătrată din ambele părți, şi referindu-ne la norma vectorilor, inegalitatea se scrie ca:

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Mai mult, egalitatea intervine dacă şi numai dacă *x* şi *y* sunt linear dependenți (sau, în sens geometric, sunt paraleli) sau dacă unul din vectori este egal cu zero.

Cazul finit-dimensional al acestei inegalități pentru vectori reali a fost demonstrat de Cauchy în 1821, şi în 1859, elevul lui Cauchy, V.Buniakovski a observat că mergând la limita se poate obține o forma integrală a inegalității lui Cauchy. Rezultatul general pentru un spațiu cu produs scalar fost obținut de K.H.A.Schwarz în 1885.

In spatiul euclidian $\mathbf{R}^n$ cu produsul scalar standard, inegalitatea Cauchy-Schwarz se scrie

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

In acest caz special, demonstrația se poate face astfel: Fie funcția polinomială în *z*

$$(x_1 z + y_1)^2 + \cdots + (x_n z + y_n)^2 = 0.$$

Se observă că este o funcție de gradul al doilea şi că discriminantul său nu este mai mare ca zero, pentru ca nu are rădăcini reale (decât dacă sunt egale toate rapoartele x_i/y_i), astfel avem

$$\left(\sum (x_i \cdot y_i)\right)^2 - \sum x_i^2 \cdot \sum y_i^2 \leq 0$$

care dă inegalitatea Cauchy-Schwarz.

O demonstra□ie echivalentă pentru $\mathbf{R}^n$ este prin metoda inducției matematice:

1)Verificarea pentru n = 2

$\sum_{i=1}^{2} a_i^2 . \sum_{i=1}^{2} b_i^2 \geq (\sum_{i=1}^{2} a_i b_i)^2 <=>$

$<=> (a_1^2+a_2^2)(b_1^2 b_2^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2)^2 <=>$

$<=> (a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2 \geq a_1^2b_1^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_2^2 <=>$

$<=> a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2 \geq 0 <=>$

$<=> (a_1b_2-a_2b_1)^2 \geq 0$ (Adevarat)

2)Presupunem că

$\sum_{i=1}^{k} a_i^2 . \sum_{i=1}^{k} b_i^2 \geq (\sum_{i=1}^{k} a_i b_i)^2$ este adevărată şi demonstrăm că:

$\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 . \sum_{i=1}^{k+1} b_i^2 \geq (\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i)^2$ este adevărată: $\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 . \sum_{i=1}^{k+1} b_i^2 = (\sum_{i=1}^{k} a_i^2 + a_{k+1}^2)$ $(\sum_{i=1}^{k} b_i^2 + b_{k+1}^2) = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 . \sum_{i=1}^{k} b_i^2 + b_{k+1}^2 . \sum_{i=1}^{k} a_i^2 + a_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k} b_i^2 + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2$

$(\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i)^2 = (\sum_{i=1}^{k} a_i b_i + a_{k+1} b_{k+1}) = (\sum_{i=1}^{k} a_i b_i)^2 + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 + 2a_{k+1}b_{k+1} \sum_{i=1}^{k} a_i b_i \geq$

$\geq (\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i)$, unde am folosit ipoteza inductiei

Pentru finalizarea demonstrației este suficient să demonstrăm că:

$b_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k} a_i^2 + a_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k} b_i^2 \geq 2a_{k+1}b_{k+1} \sum_{i=1}^{k} a_i b_i$

$b_{k+1}^2(a_1^2 + a_{k+1}b_1^2 - 2a_{k+1}b_{k+1}a_1b_1) + (b_{k+1}^2a_2^2 + a_{k+1}^2b_2^2 - 2a_{k+1}b_{k+1}a_2b_2) + \ldots +$

$+ (b_{k+1}^2a_k^2 + a_{k+1}^2b_k^2 - 2a_{k+1}b_{k+1}a_kb_k \geq 0$

$(b_{k+1}a_1 - a_{k+1}b_1)^2 + (b_{k+1}a_2 - a_{k+1}b_2)^2 + \ldots + (b_{k+1}a_k - a_{k+1}b_k)^2 \geq 0$ (Adevărat)

Bibliografie

[1].Buşneag, D., Leonte, A., Vladimirescu, I. – Culegere de probleme pentru admiterea în învățământul superior şi perfecționarea profesorilor de matematică din învățământul preuniversitar, Editura Sitech, Craiova, 1993;

[2].Panaitopol, L., Bandilă, V., Lascu, M. – Inegalități, Editura GIL, 2004;

[3].C. Nastasescu; C. Nita; S. Popa „Matematica”-manual pentru clasa a X-a, Algebră, Ed. Didactică şi pedagogică,

[4].R.A. Bucureşti 1996; pag.46;

[5].www.referat.ro

[6].www.wikipedia.ro

[7].www.wapedia.ro